$$f(x) = cos^k(mx)$$

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$f'(x) = -mk(\cos(mx))^{k-1} sen(mx)$

$f''(x) = -m^2\, k\, cos(mx)(\cos(mx))^{k-1} +$
$m^2 k(-1)(\cos(mx))^{k-2}(sen(mx))^2$

Quindi per valori di x intorno allo zero al secondo ordine

$$f(x) = 1 - \frac{m^2\, k}{2} x^2$$

Stesso sviluppo per l'esponenziale

$$g'(x) = -\frac{2x}{2\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + \frac{2x^2}{2\sigma^4} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Quindi per valori di x intorno allo zero al secondo ordine

$$g(x) = 1 - \frac{1}{2\sigma^2} x^2$$

Quindi necessariamente

$$k = \frac{1}{(m\sigma)^2}$$

E di conseguenza le due funzioni coincidono per x vicino a zero

$$f(x) = cos^{\frac{1}{(m\sigma)^2}}(mx)$$

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

E di conseguenza si può dimostrare che

$$\lim_{m \to 0} \frac{cos^{\frac{1}{(m\sigma)^2}}(mx)}{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}} = 1$$

Per qualunque valore di x

Per la dimostrazione basta elevare la frazione a $(m\sigma)^2$ e calcolare il limite

$$\lim_{m \to 0} \frac{cos(mx)}{e^{-\frac{(mx)^2}{2}}} = 1$$

Per qualunque valore di x

Quindi se m è sufficientemente piccolo e quindi $k = \frac{1}{(m\sigma)^2}$ sufficientemente grande le due funzioni

$$f(x) = cos^k(mx)$$

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

si avvicinano a piacere per qualunque x

L.Quarantelli /12/2021