Prologo

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}Rk} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{N}R1} + \cdots + e^{i\frac{2\pi}{N}R(N-1)}$$

$$R = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{N}R}\right) \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}Rk} = \left(1 - e^{i\frac{2\pi}{N}R}\right)\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{N}R1} + \cdots + e^{i\frac{2\pi}{N}R(N-1)}\right)$$

$$\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{N}R}\right) \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}Rk} = 1 - e^{i\frac{2\pi}{N}RN}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}Rk} = \frac{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}RN}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}R}} = \frac{1 - e^{i2\pi R}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}R}} = 0$$

Quindi se $R \neq 0$ segue che

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}Rk} = 0$$

Quindi se $R = 0$ segue che

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}Rk} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i0} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

Di conseguenza

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}Rk} = N * \delta_0^R}$$

Trasformata di Fourier

Un segnale campionato ogni Δt (ad es $10ms$) può essere rappresentato da N valori (ad es 4096, 2048, 1024, 512, 128…) ogni valore è individuato da una coordinata di tempo $t_k = k * \Delta t$

Ammettiamo che il nostro segnale sia una sinusoide pura

$b(t) = G * \cos(\omega t + \varphi)$ viene campionato ogni quindi avremo N valori

$$b_k = G * \cos(\omega\, k\Delta t + \varphi)$$

Un caso particolare potrebbe essere $\omega = \omega_{J_0} = \frac{2\pi}{N\Delta t} J_0$ con $J_0 = 0,1,2, \ldots, N/2$

Per trasformata di Fourier si intende trasformare il vettore b_k in un altro a_j definito come

$$a_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{i\frac{2\pi}{N}jk}$$

Si deve notare che la trasformazione ha un'inversa, infatti

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} b_s e^{i\frac{2\pi}{N}js}\, e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} b_s e^{i\frac{2\pi}{N}j(s-k)} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} b_s e^{i\frac{2\pi}{N}j(s-k)}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} b_s \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}j(s-k)} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} N b_s \delta_0^{s-k} = b_k$$

Quindi le due trasformazioni diretta ed inversa sono

$a_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{i\frac{2\pi}{N}jk}$	$b_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk}$

Anche se b_k è reale

Se b_k **è reale** allora per $j = 1, 2, \dots, (\frac{N}{2} - 1)$

$$a_{N-j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{i\frac{2\pi}{N}(N-j)k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{i\frac{2\pi}{N}jk} \right)^*$$

Ovvero $a_{N-j} = {a_j}^*$ *o viceversa*

$$b_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} = a_0 + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} + a_{\frac{N}{2}} e^{-i\pi k} + \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk}$$

Cambiando l'ordine nell'ultima sommatoria

$$b_k = a_0 + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} a_{N-j} e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-j)k} + a_{\frac{N}{2}} e^{-i\pi k}$$

$$b_k = a_0 + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} {a_j}^* e^{i\frac{2\pi}{N}jk} + a_{\frac{N}{2}} e^{-i\pi k}$$

a_j è complesso e quindi $a_j = |a_j| * (\cos\varphi_j + i * sen\varphi_j) = |a_j| * e^{i\varphi_j}$

Inoltre ${a_j}^* = |a_j| * (\cos\varphi_j - i * sen\varphi_j) = |a_j| * e^{-i\varphi_j}$

$$b_k = a_0 + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} |a_j| \left[e^{i\varphi_j} e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} + e^{-i\varphi_j} e^{i\frac{2\pi}{N}jk} \right] + a_{\frac{N}{2}} e^{-i\pi k}$$

$$b_k = a_0 + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} |a_j| \left[2 * \cos\left(\frac{2\pi}{N} jk - \varphi_j\right)\right] + a_{\frac{N}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}k\right)$$

Questo ci dice che un qualunque segnale che varia nel tempo di cui conosciamo N valori campionati di seguito nel tempo può essere descritto da una sovrapposizione dei valori di N/2 oscillatori di frequenza $f_j = \frac{1}{N\Delta t} j$ j=1;... ; N/2 (ad es $N = 1024$ $\Delta t = 10ms$ quindi ($f_1 = 0{,}098Hz; f_2 = 0{,}195Hz) \ldots; f_{512} = 50Hz$))

Ciascuno con propria ampiezza e fase.

In altre parole

$$b(k * \Delta t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} |a_j| \left[2 * \cos\left(\frac{2\pi}{N\Delta t} jk\Delta t - \varphi_j\right)\right] + a_{\frac{N}{2}} * \cos\left(\frac{2\pi}{N\Delta t}\frac{N}{2}k\Delta t\right)$$

$$b(k * \Delta t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} |a_j| [2 * \cos(2\pi f_j\, k\Delta t - \varphi_j)] + a_{\frac{N}{2}} * \cos(2\pi f_{\frac{N}{2}} k\Delta t)$$

Cosa succede se si sovrappone un segnale s_k al segnale b_k noto

$$s(k * \Delta t) = r_0 + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} |r_j| [2 * \cos(2\pi f_j\, k\Delta t - \alpha_j)] + r_{\frac{N}{2}} * \cos(2\pi f_{\frac{N}{2}} k\Delta t)$$

$$\begin{aligned} b(k * \Delta t) + s(k * \Delta t) \\ &= a_0 + r_0 \\ &+ \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} \left(|a_j| [2 * \cos(2\pi f_j\, k\Delta t - \varphi_j)] + |r_j| [2 * \cos(2\pi f_j\, k\Delta t - \alpha_j)]\right) \\ &+ \left(a_{\frac{N}{2}} + r_{\frac{N}{2}}\right) * \cos(2\pi f_{\frac{N}{2}} k\Delta t) \end{aligned}$$

Quindi le frequenze non modificano, semplicemente dato che la somma di due moti sinusoidale della stessa frequenza è un altro della stessa frequenza ma con ampiezza e fase differente